Lycée René Cassin – PC

Devoir n°1

Durée : 1h

Toutes les fonctions doivent être écrites en Python.

Exercice 1 – *Un nouvel algorithme de tri*

Soit N un entier naturel non nul. On cherche à trier une liste L d'entiers naturels strictement inférieurs à N.

1. Ecrire une fonction *comptage*, d'arguments L et N, renvoyant une liste P dont le k-ième élément désigne le nombre d'occurrences de l'entier k dans la liste L.

2. Utiliser la liste P pour en déduire une fonction *tri*, d'arguments L et N, renvoyant la liste L triée dans l'ordre croissant.

3. Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme ? La comparer à la complexité d'un tri par insertion ou d'un tri fusion.

Exercice 2 – *Questions autour des matrices*

Dans cet exercice, une matrice sera une liste de N listes, ces dernières représentant les N lignes de la matrice. Ainsi, A = [[1,2,3],[4,5,6]] définit une matrice à deux lignes (L_0 et L_1) et trois colonnes (C_0, C_1, C_2) vérifiant A[0][1]=2.

Les questions 1 et 5 sont indépendantes des questions 2, 3, 4.

1. Ecrire une fonction *identite* de paramètre un entier n qui renvoie la matrice identité d'ordre n.

2. Ecrire une fonction *determinant* de paramètre une matrice carrée M d'ordre $n \geq 2$ qui renvoie le déterminant de M en effectuant un calcul direct si $n = 2$ ou de manière récursive en utilisant le développement par rapport à la première ligne si $n > 2$.

3. Evaluer la complexité de la fonction *determinant*, en comptant le nombre de multiplications effectuées.

4. Comparer cette complexité avec celle du pivot de Gauss, qui permet également d'effectuer des calculs de déterminants (voir TP4. Applications du pivot de Gauss).

5. Une matrice de Hadamard est une matrice carrée dont les coefficients sont tous 1 ou –1 et dont les lignes sont toutes orthogonales entre elles.

Exemples : $H_1 = (1)$ $\quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Sylvester propose une construction de matrices de Hadamard basée sur la propriété suivante : Si H est une matrice de Hadamard d'ordre n, alors $\begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard d'ordre $2n$.

Ecrire une fonction récursive *sylvester* prenant en paramètre un entier n, sous la forme 2^k, et renvoyant une matrice de Hadamard d'ordre n.

Jacques Salomon Hadamard (1865 –1963) est un mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie.

La question ouverte la plus importante à propos des matrices de Hadamard est celle de leur existence. D'après la conjecture de Hadamard, une matrice de Hadamard d'ordre 4k existe pour tout entier positif k. À la suite de l'annonce de la découverte d'une matrice de Hadamard d'ordre 428 le 21 juin 2004 par Hadi Kharaghani et Behruz Tayfeh-Rezaie, le plus petit ordre multiple de 4 pour lequel aucune matrice de Hadamard n'est connue est actuellement 668.